Retlinet bevægelses sted, hastighed og acceleration

1999x

24. februar 2001

Indhold

1 Indledning

Hvis man kun har lært om differentialregning i matematik, må man spørge sig selv hvorfor nogle fik den idé at finde differentialkvotienter. Fysik giver svaret på dette spørgsmål. Differentialregning formuleret som et hjælpemiddel til fysikken. Det skete i Isaac Newtons *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687), hvor Newton viste at differentialkvotienter er udtryk for en fysisk realitet: Hvis man har en graf der viser hvor en genstand er til forskellige tidspunkter, vil differentialkvotienten vise hvad genstandens hastighed er. Der er en tilsvarende sammenhæng mellem hastigheden til forskellige tidspunkter og accelerationen. Det vil du forstå ved at læse disse sider.

Principia handler om mange forskellige fysiske fænomener (fx lys, lyd og tryk), men centralt i værket står *bevægelser og kræfter*. I den første af de tre bøger, som værket omfatter, udvikler Newton de matematiske hjælpemidler, og blandt dem er differentialregningen. (Tredje bog er en speciel præstation, for i den giver Newton en fuldstændig teori for planeternes bevægelser. Det havde man prøvet på siden oldtiden, men nu lykkedes det for første gang. Med *Principia* gjorde Newton en præstation mindst lige så stor som Einsteins.)

2 Grundlæggende antagelser

Vi går ud fra at en genstand, fx et lod, befinder sig forskellige steder til forskellige tider. Dvs. at der til hvert tidspunkt t er knyttet et sted s. Vi kan derfor sige at stedet er en funktion af tiden: $s(t)$, *stedfunktionen*. Hvis vi kender denne funktion $s(t)$, kan vi tage en værdi for t og sætte den ind i $s(t)$ og regne ud hvor loddet er på det pågældende tidspunkt. Så har vi fået en matematisk beskrivelse af loddets *sted*.

Hastigheden v er også en funktion af tiden, og $v(t)$ kan vi beskrive matematisk ved at sige at det er ændringen af sted (Δs) i forhold til et tidsrum (Δt). Det udtrykkes matematisk således:

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

Her kan man se at vi finder *hastighedsfunktionen* ved at differentiere stedfunktionen: $v(t) = s'(t)$.

Accelerationen kan vi beskrive matematisk ved at sige at det er ændringen af hastighed (Δv) i forhold til et tidsrum (Δt). Det udtrykkes matematisk således:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2}$$

Her kan man se at vi finder *acceleration* ved at differentiere hastighedsfunktionen: $a(t) = v'(t)$. Accelerationen kan være en konstant, fx tyngdeacceleration g, eller den kan være en funktion af t.

Alt dette kan sammenfattes således:

$$s'(t) = v(t) \tag{3}$$

$$s''(t) = v'(t) = a \tag{4}$$

2.1 Den grafiske betydning af $s''(t) = v'(t) = a$

I matematik har I lært at hvis I tegner grafen for $f(x)$ i et (x–y)-koordinatsystem, så er hældningskoefficienten af en tangent til et punkt på grafen lig med differentialkvotienten af $f(x)$ for den pågældende værdi af x. Dette kan overføres på vores resultater her. Hvis vi har grafen for $s(t)$ og tegner tangenten til et punkt på grafen, er dens hældning lig med $v(t)$ for den pågældende værdi af t.

2.1.1 Øvelse

Antag at vi har grafen for $v(t)$. Hvad udtrykker en tangents hældningskoefficent i dette tilfælde?

2.1.2 Øvelse

Find $v(t)$ til tiderne 1 og 4 sek. på grafen for en stedfunktion side 253, 5e i Orbit 2.
Find a på grafen for hastighedsfunktionen side 253, 5e i Orbit 2.

3 Eksempler

3.1 Bevægelse med konstant acceleration

Et enkelt og illustrerende eksempel på en lineær bevægelse er det frit fald i Jordens tyngdefelt. Udgangspunktet er her at bevægelsen sker med en konstant acceleration. Fordi vi kender accelerationen, må vi begynde bagfra for at arbejde os frem til hastighedsfunktion $v(t)$ og stedfunktionen $s(t)$. Vi skal altså finde en funktion, $v(t)$, som når den differentieres, giver en konstant, som vi her kalder a.[1] Denne betingelse opfylder funktionen

$$v(t) = at + v_0 \tag{5}$$

som i formlen side 255 i Orbit 2. v_0 er en konstant som forsvinder hvis vi differentierer $v(t)$; dens fysiske betydning bliver forklaret om lidt.

For at finde stedfunktionen mangler vi nu bare at finde en funktion som når den differentieres, giver $at + v_0$. Det gør denne funktion

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{6}$$

s_0 er en konstant som forsvinder hvis vi differentierer $s(t)$; dens fysiske betydning bliver forklaret om lidt.

3.1.1 Øvelse

Find $s'(t)$ og $s''(t)$ ved at differentiere $s(t)$, og kontroller om $v(t)$ og a giver det rigtige.

3.1.2 Den fysiske betydning af v_0 og s_0

v_0 er den hastighed loddet kan have på det tidspunkt hvor vi begynder at se på dets bevægelse. s_0 er loddets position på det tidspunkt hvor vi begynder at se på dets bevægelse. Hvis loddet til tiden $t = 0$ s har $v = 0$ m/s, og hvis vi indretter vores målestok sådan at loddet til tiden $t = 0$ s er ud for 0 m, altså $s(0) = 0$ m, forsvinder v_0 og s_0 (fordi de er $= 0$), og så har vi som udtryk for hastighedsfunktionen og stedfunktionen:

$$v(t) = at \tag{7}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 \tag{8}$$

3.2 Lineæar harmonisk bevægelse: Lod i en fjeder

I dette tilfælde vil vi se på et lod der svinger op og ned i en fjeder. Fjederen har fjederkonstanten k (se side 266 f. i Orbit 2) og loddet har massen m. Her begynder vi med stedfunktionen og går så frem til hastighedsfunktionen og videre til accelerationsfunktionen. Stedfunktionen kan udtrykkes matematisk således hvis vi vedtager at loddet er midt mellem sit udsvings to yderpunkter når $t = 0$ sek.:

$$s(t) = A\sin(\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \tag{9}$$

A er *amplituden*, dvs. et udtryk for højt op og hvor langt ned loddet kommer i sin bevægelse.

[1] Ofte kaldes tyngdeacceleration g.

3.2.1 Øvelse

Vi ser på et lod med massen $m = 1$ kg som hænger i en fjeder med $k = 10$ N/m. $A = 1$ m. Tegn $s(t)$ for $t \in [0; 4]$ sek.

Fjederkonstanten k er et udtryk for hvor "stiv" fjederen er. En meget stiv fjeder har en stor fjederkonstant. Nu bytter vi fjederen ud med en anden der har en fire gange så stor fjederkonstant, dvs. $k = 40$ N/m. Tegn $s(t)$ for $t \in [0; 4]$ sek.

Prøv med de udleverede fjedre og lodder om det passer at en stiv fjeder svinger således sammenlignet med en mindre stiv fjeder (et tip: hvis du ikke kan finde en fjeder med en større fjederkonstant, kan du hænge loddet op i to ens, parallelle fjedre; det fordobler fjederkonstanten).

Prøv også at øge massen, fx ved at sætte to af de udleverede lodder på i stedet for kun et. Passer dine iagttagelser med hvad formlen får dig til at forvente?

3.2.2 Øvelse

Find $s'(t)$ og $s''(t)$. Disse to udtryk får du brug for til øvelsen *Lod ophængt i fjeder.*

Se på din første graf og aflæs t når loddet er i en yderstilling. Sæt denne værdi for t ind i dit udtryk for $s'(t)$. Hvad får du? Virker det rimeligt når du ser et lod for dig?

Sæt samme værdi for t ind i $s''(t)$. Samme spørgsmål som før.

Besvar til sidst:

- Hvor er loddets hastighed størst?
- Hvor er loddets hastighed 0 m/s?
- Hvor er loddets acceleration størst?
- Hvor er loddets acceleration 0 m/s^2?